EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

2 — 1 OKTOBER 1967

INHOUD

Interimrapport Werkgroep Wiskunde-onderwijs in het havo 33
Wiskunde in de bovenbouw van het havo 36
R. Kooistra: Over de formules $t_k = s_k - s_{k-1} (k \geqq 2)$ en $\lim s_k = s$ 49
Symbolen uit de verzamelingsleer 52
Boekbespreking 59
Staatsexamen Gymnasium 1966 61
Recreatie 61
Wiskundewerkgroep van de W.V.O. 64
Kalender 64
Liwenagel 64

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening **143917**, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

INTERIMRAPPORT

Werkgroep Wiskunde-onderwijs in het H.A.V.O., ingesteld door de Drie Pedagogische Centra

1. OPRICHTING

In haar vergadering van 4 februari 1965 stelde de Coördinatiecommissie Wiskunde van de drie Pedagogische Centra: het Katholiek Pedagogisch Bureau, het Christelijk Pedagogisch Studiecentrum en het Onderwijskundig Studiecentrum, voor een Werkgroep in het leven te roepen voor het wiskunde-onderwijs in het H.A.V.O.

Op 1 april installeerde de heer drs. A. J. S. van Dam de Werkgroep, die op 13 mei 1965 voor de eerste maal samenkwam.

2. SAMENSTELLING

De volgende personen aanvaardden de uitnodiging van de drie Pedagogische Centra om zitting te nemen in de Werkgroep. Uitdrukkelijk werd van te voren gesteld dat een ieder à titre personnel was gevraagd en had toegezegd en dat in de Werkgroep geen verenigingen, organisaties of functies vertegenwoordigd zijn.

Drs. H. J. Jacobs Jr., Voorburg, voorzitter;
E. H. Schmidt, Emmen, later Amstelveen, secretaris;
Drs. Chr. Boermeester, Den Haag;
Ir. L. F. Cooke, Den Haag;
W. J. Kniep, Aalsmeer;
G. Krooshof, Groningen
D. Leujes, Delft;
R. Troelstra, Hilversum.

De heer Ir. L. F. Cooke heeft tot zijn spijt geen vergadering bijgewoond. In zijn plaats namen aan de besprekingen deel de heren Drs. H. Brouwer, Amsterdam en Ir. J. Tönjes, Den Haag, van wie de laatste zich na enkele vergaderingen liet vervangen door de heer G. Pieterse, Den Haag.

De Pedagogische Centra hebben gevolg gegeven aan een verzoek van de Werkgroep de heer Drs. B. J. Westerhof, Rijswijk, aan de Werkgroep toe te voegen. De heer Westerhof aanvaardde deze uitnodiging en woonde met ingang van de 6e vergadering op 23 december 1965 de vergaderingen regelmatig bij.

3. DOEL

Als doel van de Werkgroep werd gesteld: het opstellen en het uitwerken van een wiskunde-leerplan voor het H.A.V.O., dat rekening houdt met de moderne tendensen in de wiskunde en de wiskunde-didactiek.

Het in overleg tussen Wimecos en de Inspectie VHMO opgestelde leerplan en het eindexamenprogramma is op verlangen van de Staatssecretaris vrij snel tot stand gekomen omdat spoedig voor de rijksscholen over een leerplan moest worden beschikt. Het is echter zinvol om te streven naar een moderner georiënteerd leerplan.

Een tweede doel dat aan de Werkgroep werd voorgelegd: leiding geven aan en coördineren van de werkzaamheden van de wiskunde-leraren aan de reeds in een experimenteel stadium werkende h.a.v.o.-scholen werd als zeer belangrijk gezien, doch de Werkgroep achtte vooralsnog geen mogelijkheden aanwezig naast het primaire doel ook dit tweede doel te verwezenlijken.

4. ÉÉN LEERPLAN VOOR ALLE LEERLINGEN?

De Werkgroep heeft zich als uitgangspunt gesteld, dat de *niet*-mathematische richtingen in het h.a.v.o. (de leerlingen die de wiskunde niet als examenvak zullen kiezen) en de *wel*-mathematische richtingen (de leerlingen met wiskunde als examenvak) gedurende de eerste drie leerjaren zoveel mogelijk samen dienen te gaan, waarbij de mogelijkheid tot differentiatie open gehouden wordt.

Een eventuele differentiatie komt voort uit verschillen in doelstelling van de genoemde richtingen waarbij de keuze van de stof mede wordt bepaald door de materiële eisen van het hoger beroepsonderwijs enerzijds en de formele waarde die het vak voor *alle* leerlingen dient te hebben anderzijds.

5. HET KARAKTER VAN HET LEERPLAN

De Werkgroep staat op het standpunt, dat het leerplan niet een opsomming dient te geven van een aantal onderwerpen, die min of meer met elkaar samenhangen, maar dat de nadruk gelegd moet worden op de verbindende en grondleggende begrippen.

In de *algebra* zijn dit bijvoorbeeld: de verzamelingenleer, de relaties en functies, de getallensystemen en de operaties daarin.

In de *meetkunde*: de afbeeldingen (transformaties), het gebruik van coördinaten, de begrippen congruentie en gelijkvormigheid.

In het gehele leerplan zal duidelijk moeten blijken, dat deze begrippen de wezenlijke basis van het wiskunde-onderwijs uitmaken.

Het spreekt vanzelf, dat de vaardigheden en technieken niet mogen ontbreken, zoals bijvoorbeeld: wiskundige operaties in getallenverzamelingen, op variabelen en op tweetermen; ontbinden in factoren; het vlot kunnen oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden, het hanteren van een tabel, een rekenliniaal of rekenmachine; het tekenen van grafieken; het berekenen en schatten van lengten, oppervlakten en inhouden; het schatten van vierkantswortels en wortels van vergelijkingen; het construeren van figuren met passer en liniaal en het tekenen van ruimtefiguren.

6. LEERBOEK

De Werkgroep is via de Firma Wolters in Groningen in aanraking gekomen met de leergang: *Modern Mathematics for Schools*, prepared by the Scottish Mathematics Group. Publishers: Blackie (Glasgow and London) and Chambers (Edinburgh and London). Deze uitgave bleek in zoveel opzichten overeen te stemmen met bovengenoemde uitgangspunten en doelstellingen, dat de Werkgroep besloot te stimuleren dat deze methode zou worden vertaald en bewerkt en wel zo dat het eerste deel op korte termijn, nog voor het cursusjaar 1966–1967 zou kunnen verschijnen. De Werkgroep meent dat deze methode in het bijzonder geschikt is voor de onderbouw van het h.a.v.o., maar dat zij ook in het m.a.v.o. goede diensten kan bewijzen. Enkele leden van de groep hebben op uitnodiging van de Uitgevers een studiereis gemaakt naar Schotland, waar ze zich op de hoogte hebben kunnen stellen omtrent het ontstaan en het gebruik van deze leerboeken. Bovengenoemde mening van de Werkgroep is door de resultaten van deze reis bevestigd. Een verslag is in verschillende bladen gepubliceerd, zie o.a. „Euclides", Jaargang **42**, blz. 97—105.

Inmiddels zijn enige delen van deze leergang verschenen onder de titel „*Moderne Wiskunde voor Algemeen Voortgezet Onderwijs*", terwijl in een twintigtal scholen gedurende het cursusjaar 1966—1967 met deze methode is geëxperimenteerd.

7. OVERIGE WERKZAAMHEDEN

De Werkgroep kwam zeventien maal bijeen, voor het eerst op

13-5-1965, voor het laatst op 25-5-1967. Tijdens het verblijf buitenslands van de voorzitter leidde de heer D. Leujes de vergaderingen.

Toen in het najaar van 1966 de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde besloot tot het opstellen van discussienota's ter voorbereiding van een gemoderniseerd wiskundeleerplan voor scholen voor V.W.O., H.A.V.O. en M.A.V.O. en zij voor dit doel werkgroepen instelde, werden de heren Krooshof, Leujes, Schmidt en Westerhof in de Werkgroep voor het H.A.V.O. opgenomen, waardoor de vrucht van vele besprekingen kon worden ingebracht. Hierdoor was het mogelijk op korte termijn een discussienota op te stellen. Een toelichting op het programma voor de bovenbouw van het H.A.V.O. was echter niet tijdig gereed. Aangezien de Werkgroep van de Pedagogische Centra van mening is dat de leraren met een uitgebreide toelichting gebaat zijn, wordt deze toelichting tegelijk met dit Interimrapport ter publikatie in „Euclides" aangeboden.

WISKUNDE IN DE BOVENBOUW VAN HET HAVO

Rapport samengesteld door de
Werkgroep Wiskunde-Onderwijs in het H.A.V.O.

INLEIDING

De formele doelstellingen zijn voor de bovenbouw niet wezenlijk anders dan voor de onderbouw. Ook in de bovenbouw zullen de overkoepelende en samenbindende begrippen als afbeelding, functie, relatie, grafiek, transformatie en het allesdoordringende begrip verzameling centraal moeten staan.

Het is echter goed ons te bezinnen op het grote verschil tussen onder- en bovenbouw. In de bovenbouw is wiskunde een keuzevak, hetgeen betekent, dat alleen zij, die menen de wiskunde nodig te hebben en — misschien — bovendien enkelen, die de wiskunde prettig vinden en er wat meer van willen weten, dit vak in de bovenbouw zullen kiezen. Dit heeft twee gevolgen:

a) de materiële doelstellingen zullen bepaald moeten worden door de vraag: wat zullen de havo-abituriënten met hun wiskunde kunnen of willen doen?

b) het niveau van de bovenbouw-wiskunde kan relatief hoger zijn dan in de onderbouw, omdat met een groep die zichzelf geselecteerd heeft wordt gewerkt.

Wat we ook niet buiten beschouwing kunnen laten, is het verschil tussen vwo en havo. De leerlingen krijgen een opleiding, die niet bedoeld is als voorbereiding tot wetenschappelijk werk. Het havo zal daarom minder theoretisch en meer op toepassingen gericht moeten zijn dan het vwo. Dit zal men bij het noemen en beoordelen van materiële doelstellingen voor het havo steeds moeten bedenken. De uitspraak, dat elk onderwerp op elk niveau te behandelen is, mag overdreven zijn, een grond van waarheid zit er wel in.

OVERZICHT EN SAMENHANG VAN DE LEERSTOF

In de onderbouw is reeds aandacht geschonken aan de wiskundige taal, waarbij al dan niet gebruik is gemaakt van logische symbolen. In de bovenbouw dient het parallellisme tussen de symbolen uit de verzamelingenleer en de logische symbolen expliciet aan de orde te worden gesteld.

In de onderbouw is het functie-begrip ontwikkeld. In de bovenbouw komt nu in de eerste plaats de uitbreiding met nieuwe soorten functies (gebroken, wortel-, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies), in de tweede plaats enige kennis van de differentiaalrekening, waardoor het functiebegrip verdiept wordt. Grafieken spelen bij al deze functiebeschouwingen een belangrijke rol. De grafiek van een rij bestaat uit „losse" punten; de grafiek van de rij $t_k = 2^k$ kan de aanloop zijn tot de functie f: $x \rightarrow 2^x$ en de machten met reële exponenten. Ook bij logaritmen: eerst de functie mét grafiek. Vergelijkingen en ongelijkheden zijn geen onderwerpen op zichzelf, maar komen bij de behandeling van de functies te voorschijn.

De relaties en hun grafieken, die ook al in de onderbouw zijn behandeld (rechte lijn en cirkel), vormen de overgang naar de analytische meetkunde, klassiek met coördinaten.

Ook de afbeeldingen in de meetkunde — de transformaties — komen daarbij weer aan de orde, nu met hun transformatieformules, die aanleiding kunnen zijn voor een eenvoudige behandeling van matrices (twee bij twee).

De overeenkomst tussen de algebra-parabolen en analytische-meetkundeparabolen zal duidelijk worden, als de notatie $\{(x,y)|y = x^2\}$ bij grafieken en functies en $\{(x, y)|x = y^2\}$ in de analytische meetkunde wordt gebruikt.

Wanneer de 3-dimensionale meetkunde niet óók analytisch (klassiek wel te verstaan) wordt behandeld, dan hangt de stereometrie er als een „vijfde wiel" bij. Een heel summiere inleiding in de

klassieke 3-dimensionale meetkunde kan ook nuttig zijn om eventueel in andersgericht onderwijs de behandeling met vectoren en lineaire algebra beter te begrijpen. Van de eigenlijke stereometrie is in de onderbouw al heel wat behandeld: berekeningen van lengten, oppervlakten en inhouden, van hoeken van lijnen en vlakken.

Daarom kan met weinig in de bovenbouw volstaan worden. Maar we menen, dat weglaten van dit laatste z.g. constructief element in het havo niet verantwoord is.

Als belangrijke toepassing van de wiskunde wordt ook in de bovenbouw de statistiek aan de orde gesteld. Het kritische denken, dat nodig is om statistiek te kunnen toepassen, is wel van zo groot belang vóor de ontwikkeling van het denken van de leerlingen en tevens van zo groot maatschappelijk belang, dat het op grond hiervan verantwoord en wenselijk kan worden geacht om een beperkt aantal lesuren aan de statistiek te besteden. Hierbij dient men zich niet tot de beschrijvende statistiek te beperken.

DE ONDERWERPEN

Verzamelingen en logica

In de onderbouw heeft reeds een integratie van het onderwerp verzamelingen in de leerstof plaatsgevonden. Ook heeft de wiskundige taal, al of niet met gebruikmaking van logische symbolen, de aandacht gehad. In de bovenbouw dienen de logische symbolen voor de conjunctie, disjunctie, negatie, implicatie, equivalentie en eventueel ook de kwantoren $\forall$ en $\exists$ een plaats te krijgen.

In het bijzonder wordt gewezen op de parallellie tussen

verzamelingen	en	logica	
gelijkheid van verzamelingen	en	equivalentie	($\Leftrightarrow$)
deelverzameling	en	implicatie	($\Rightarrow$)
doorsnede	en	conjunctie	($\wedge$)
vereniging	en	disjunctie	($\vee$)
complement	en	negatie	($\neg$)

Aan concrete gevallen kunnen de geconjugeerden van de implicatie worden toegelicht: de omkering, de tegenstelling, de contrapositie.

De betekenis van een tegenvoorbeeld bij de ontkenning van een generaliserende bewering.

Het bewijs uit het ongerijmde.

Herhaling relaties en functies; differentiaalrekening

De relatie van V naar W als deelverzameling van $V \times W$,

het domein (de definitieverzameling) van een relatie,
het bereik (de waardenverzameling) van een relatie,
de grafiek van een relatie,
de functie als bijzondere relatie,
de lineaire functie met grafiek,
de kwadratische functie met grafiek en vierkantsvergelijking (wortelformule, formules voor som en produkt der wortels)
lineaire en kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden.

Bij de volgende onderwerpen zal de differentiaalrekening worden ingevoerd als hulpmiddel bij de nadere bestudering van functies en grafieken.

Rationale functies.

Indeling van de rationale functies in gehele en gebroken functies, indeling naar de graad.

Introductie van differentie- en differentiaalquotiënt in verband met de steilheid van een grafiek en de „richtingscoëfficiënt" verdient de voorkeur boven een introductie via het snelheidsbegrip, al is dit als voorbeeld bruikbaar.

Van het differentiequotiënt $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ over het interval $[x_1, x_2]$ en het differentiequotiënt $\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ over het interval $[x_1, x_1 + h]$ komt men door limietovergang (zonder epsilontiek) tot het differentiaalquotiënt in het punt x_1.

De meetkundige interpretatie hiervan, de raaklijn.

Toelichting aan de hand van voorbeelden.

Het stijgen of dalen van een functie in een interval en in een punt.
De stellingen: $f'(x_1) > 0 \Rightarrow f(x)$ is stijgend in x_1,
$f'(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$ is dalend in x_1.
Het niet omkeerbaar zijn van deze stellingen, toegelicht met voorbeelden.

De afgeleide functie van $f(x)$: $\{(x, y) | y = f'(x)\}$.

De begrippen differentieerbaar en continu, toegelicht met eenvoudige voorbeelden. Ook enkele voorbeelden van functies die voor een bepaalde waarde van de variabele niet differentieerbaar en wel of niet continu zijn.

Het differentiëren van som, verschil en produkt van twee functies.

De stelling $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. De afleiding hiervan kan langs inductieve weg geschieden door achtereenvolgens te differentiëren x, x^2, x^3, ...

Het differentiëren van gehele rationale functies.

Het berekenen van extreme waarden van gehele rationale functies zonder gebruik te maken van de tweede afgeleide (met behulp van het tekenverloop van de eerste afgeleide). Grafieken van gehele rationale functies. Vergelijkingen en ongelijkheden.

De kettingregel.

Voorbeeld als inleiding: $x \rightarrow (x^3)^2$ vervangen door $y = x^3$ en $z = y^2$ en dan via $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta y}, \frac{\Delta z}{\Delta x}$ naar $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}$.

Het differentiëren van het quotiënt van twee functies. Het differentiëren van gebroken rationale functies.

Grafieken en in verband daarmee: nulpunten, verticale en horizontale (geen scheve) asymptoten, uiterste waarden.

Vergelijkingen en ongelijkheden.

Wortelfuncties

De functie f: $x \rightarrow \sqrt{x}$. Differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, afgeleide functie, grafiek. Begrip inverse functie. De kettingregel, toegepast op functies, zoals $x \rightarrow \sqrt{3x+6}$. Grafieken van dergelijke functies.

Vergelijkingen en ongelijkheden.

Gonometrische functies

De algemene definities van sin a, cos a en tan a met behulp van vectoren. De radiaal als hoekmaat. De formules voor

$\sin(-a)$, $\cos(-a)$, $\tan(-a)$ en $\cot(-a)$;
$\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, en $\tan(a \pm b)$;
$\sin 2a$, $\cos 2a$, en $\tan 2a$;
$\sin p \pm \sin q$ en $\cos p \pm \cos q$.

De functies

$x \rightarrow \sin x$, $x \rightarrow \cos x$, $x \rightarrow \tan x$ met bijbehorende grafiek; uiterste waarden; asymptoten; periodiciteit. Aanbevolen wordt deze periodiciteit aan te duiden met bijvoorbeeld „modulo 2π".

De limieten $\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$ en $\lim_{a \to 0} \frac{\tan a}{a} = 1$. In verband hiermee: voor kleine a geldt: $\sin a \approx a$ en $\tan a \approx a$. Toepassingen.

Het differentiëren van goniometrische functies, de kettingregel. De functies $x \rightarrow a \sin(bx + c) + d$, enz. en $x \rightarrow a \cos x + b \sin x + c$, met grafieken. Eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden.

Rijen en functies

Het is gewenst een rij op te vatten als een afbeelding (functie) van de verzameling van de natuurlijke getallen (met inachtneming van de volgorde) in een andere verzameling (bijv. de reële getallen).
Omgekeerd kan men de vraag stellen of het bij een bepaalde rij mogelijk is deze in te bedden in een functie waarvan het domein bijv. de verzameling van de reële getallen is.
Bij sommige rijen, zoals de rekenkundige, blijkt dat op eenvoudige wijze mogelijk (zelfs op meerdere wijzen).
Bij een rij als $t_n = 2^n$ geeft de vraag aanleiding tot het invoeren van de exponentiële functie $x \to 2^x$.
De logaritmische functie $y \to {}^2\log y$ kan ingevoerd worden als inverse van de exponentiële functie.

Rijen

Het opsporen van regelmaat in gegeven getallenrijen, daarbij trachten t_n te geven als een functie van n.
De rekenkundige rij. De formule $t_n = t_1 + (n-1)v$.
Veel getallenvoorbeelden. De stelling: t_n is een lineaire functie van n. Grafiek.
De meetkundige rij. De formule $t_n = t_1 r^{n-1}$. Grafiek.
Grafiek van andere rijen zoals $t_n = n^2$, $t_n = \sqrt{n+1}$, $t_n = \cos \frac{1}{3} n \pi$.
Het begrip somrij.
Voor een R.R. de formule $s_n = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n)$. De stelling: s_n is een kwadratische functie van n.
Voor een M.R. de formule $s_n = \dfrac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$.
Ook wijzen op andere rijen waarvan de somrij gemakkelijk is aan te geven, bijv. $t_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
Het is gewenst de Σ-notatie in te voeren.
De formule $t_n = s_n - s_{n-1}$ behoeft niet „geleerd" maar dient wel begrepen te worden.
Bij praktische voorbeelden kan men eventueel aan „samengestelde interest" denken. Deze stof dient echter niet als onderwerp geïntroduceerd te worden.
De sommeerbaarheid van oneindige meetkundige rijen.
Enkele voorbeelden van andere, al of niet sommeerbare rijen.

Exponentiële en logaritmische functies

Uitgaande van de grafiek van een rij vragen naar de mogelijkheid om de rij in te bedden in een functie over de verzameling van de reële getallen. Bij een R.R. zal men bij voorkeur een lineaire functie nemen.

Bij de rij $t_n = 2^n$ komt men op deze wijze tot de vraag wat bijvoorbeeld $2^{3\frac{1}{2}}$ zou kunnen betekenen.

Uitbreiding van de grafiek „naar links" geeft aanleiding tot het invoeren van negatieve exponenten.

Zo bouwt men een grafiek op van $x \rightarrow 2^x$, eerst voor x rationaal; de stap daarna voor x irrationaal doet men langs intuïtieve weg.

Opmerken, dat 2^x groter dan nul is voor elke x en dat de X-as asymptoot van de grafiek is.

Eenvoudige oefeningen in het rekenen met „oneigenlijke machten". Hierbij opmerken, dat de gewone machtseigenschappen blijven gelden.

Grafieken van $x \rightarrow a^x$ voor verschillende positieve grondtallen a. Monotoon stijgende of dalende functie.

Eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden zoals $4^x = 8$ en $(\frac{1}{2})^x > 4$.

Uit de grafiek van $x \rightarrow 2^x$ concluderen dat men elk positief getal als een macht van 2 kan schrijven.

Benadering van bijv. $2^x = 5$ met behulp van de grafiek of van $2^7 \approx 5^3 \Rightarrow x \approx \frac{7}{3}$. Kan x rationaal zijn?

Ander grondtal, bijv. 10. Benadering van x in bijv. $10^x = 2$ met behulp van $2^{10} \approx 10^3$.

Logaritmentafel, wijzergetal, mantisse.

Eenvoudige berekeningen hiermee door de getallen als machten van 10 te schrijven en de machtseigenschappen toe te passen.

De functie $x \rightarrow {}^2\log x$. Oefeningen met deze notatie.

Het verband tussen de grafieken van $x \rightarrow 2^x$ en $x \rightarrow {}^2\log x$, van $x \rightarrow {}^2\log x$ en $x \rightarrow {}^{10}\log x$, van $x \rightarrow {}^2\log x$ en $x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$.

Eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden zoals ${}^2\log x = 5$, ${}^{\frac{1}{2}}\log x > 1$. De machtseigenschappen in de log-notatie.

Naar aanleiding van berekeningen als $x = {}^3\log 5$ (via $3^x = 5$) kan de formule ${}^a\log b = \dfrac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$ worden besproken.

Aansluiting bij de behandeling van de rekenliniaal in de onderbouw door het tekenen van een logaritmische schaal.

Grafieken zoals van $x \rightarrow 2^x$ en $x \rightarrow 3^x$ op logaritmisch papier. Een eenvoudig nomogram.

De analytische meetkunde van de R_2.

Bekend worden verondersteld:
de algebra van de onderbouw, waarin o.a. het gebruik van cartesische coördinaten voor het tekenen van grafieken van lineaire en kwadratische relaties en functies;
de begrippen relatie en functie als verzamelingen van geordende paren;
de meetkunde en trigonometrie van de onderbouw, waarin o.a. de stellingen van de rechthoekige driehoek;
een elementaire behandeling van het begrip vector.

A. *Cartesische coördinaten* (t.o.v. een rechthoekig assenstelsel)

Inleidende oefeningen.

De inleidende oefeningen kunnen (bijv. door eigenschappen van driehoeken, parallellogrammen, ruiten, enz. te laten onderzoeken of bewijzen) ervaringen verschaffen in het kiezen van een geschikt assenkruis en van de eenheden daarop.
Belangrijke inleidende oefeningen worden verkregen door translaties en rotaties (om de oorsprong over een veelvoud van 90°) van het assenkruis te laten uitvoeren en daarbij de relaties tussen de coördinaten van punt en beeldpunt te laten opsporen. Zo kan bijvoorbeeld de uit de algebra reeds bekende vergelijking van de parabolen met de Y-as als symmetrie-as worden getransformeerd in die van de parabolen met de X-as als symmetrie-as.

Afstanden van punten tot het punt (x_0, y_0).

De afstanden van de punten (x_1, y_1) en (x_0, y_0).
Het opsporen van de relatie tussen de coördinaten van de punten, die alle de afstand r hebben tot het punt (x_0, y_0).
a. rechtstreeks.
b. door een translatie van het assenstelsel.
De verzamelingen van de punten gegeven door de relaties

$$\{(x, y) | (x-x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Hoeken.

De vergelijkingen van alle lijnen door de oorsprong.
De vergelijkingen van alle lijnen door het punt (x_0, y_0).
De vergelijkingen van de lijnen evenwijdig met een van de coördinaatassen.

De vergelijking van de lijn door twee gegeven punten.

De hoek van twee lijnen door de oorsprong. $\text{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$.

Twee lijnen door de oorsprong, die een hoek van 90° maken.

De hoek van twee lijnen door het punt (x_0, y_0). Loodrechte stand van die lijnen.

Gebruik makende van de loodrechte stand van straal en raaklijn van een cirkel, de vergelijking van de raaklijn in een punt aan die cirkel af te leiden.

Eenvoudige puntverzamelingen.

De kegelsneden, in het bijzonder de ellips en de hyperbool, worden niet als onderwerp geïntroduceerd. Als verzamelingen van punten kunnen zij bijvoorbeeld op de volgende wijze aan de orde worden gesteld, waarbij de begrippen brandpunt en richtlijn ter sprake komen.

1. a. Het tekenen van punten, waarvan de afstand tot de oorsprong de helft is van hun afstand tot de lijn $x = -6$.
   b. Bewijzen, dat er twee van deze punten op de X-as liggen.
   c. Het opstellen van de relatie tussen de coördinaten van de in a genoemde punten.
   d. Bewijzen, dat de puntenverzameling symmetrisch is ten opzichte van de X-as en ten opzichte van de middelloodlijn van de in b gevonden punten.
2. a. Het tekenen van punten, waarvan de afstand tot de oorsprong gelijk is aan hun afstand tot de lijn $x = -6$.
   b. Het opstellen van de vergelijking van deze puntenverzameling.
   c. Het onderzoek van het aantal snijpunten met de X-as, de symmetrie, enz.
3. a. Het tekenen van punten, waarvan de afstand tot de oorsprong tweemaal zo groot is als hun afstand tot de lijn $x = -6$.
   Het opstellen van de vergelijking van de puntverzameling.
   c. Het onderzoek van snijpunten met de X-as, symmetrie, enz.

Ook als de verzamelingen $\{X \mid XA \pm XB = c\}$ kunnen ellips en hyperbool ter sprake komen.

De vergelijking van de raaklijn in een punt van een parabool aan die parabool af te leiden met behulp van differentiaalrekening.

B. *Poolcoördinaten*

Het aanwijzen van punten door middel van poolcoördinaten (r, φ).
De verzameling van de punten, waarvoor r constant is.
De verzameling van de punten, waarvoor φ constant is.
De spiralen $r = c\varphi$.
De overgang van poolcoördinaten op Cartesische en omgekeerd:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ r^2 = x^2 + y^2,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

C. *Vectoren*

Een basis in R_2: de basisvectoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aangeduid met $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$; voor elke vector $\underline{a}$ geldt: $\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2$. De lengte van een vector $\underline{a}$: $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
Het inwendig produkt van twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$:

$$(\underline{a} \,.\, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

De hoek φ van twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$: $\cos\varphi = (\underline{a} \,.\, \underline{b}) : |\underline{a}| \,.\, |\underline{b}|$.
$\underline{a} \perp \underline{a}\,\underline{b} \Rightarrow (\underline{a} \,.\, \underline{b}) = 0$.
Vectorvoorstelling van een punt: Als $OA = \underline{a}$, dan wordt het punt A door de vector $\underline{a}$ aangeduid.
Vectorvoorstelling van een lijn:

door A en $// \overrightarrow{OB}$: $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\,\underline{b}$;
door A en B : $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\,(\underline{b} - \underline{a})$.

De normaalvector $\underline{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ van de lijn $\{(x, y) \mid a_1x + a_2y = a_3\}$.
De afstand van een punt en een lijn.

Transformaties in R_2. Matrices

Spiegeling t.o.v. de X-as : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$; matrix: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

Spiegeling t.o.v. de Y-as : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$; matrix: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Puntspiegeling t.o.v. O : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$; matrix: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

Spiegeling t.o.v. $y = x$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$; matrix: $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Rotatie om O over de hoek φ: $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$;

matrix: $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

Vermenigvuldiging t.o.v. O met de factor k:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}; \text{ matrix: } \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Voor afbeelding A geldt: $P' = A(P)$ of $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de matrix van A is.

Het samenstellen van deze transformaties.

De analytische meetkunde van de R_3.

A. *Stereometrische inleiding.*

Voor men begint met analytische meetkunde van de R_3 moeten de eenvoudigste stellingen van de stereometrie bekend zijn, o.a. die betreffende het evenwijdig zijn en de loodrechte stand van lijnen en vlakken. Bovendien is het gewenst de intuïtieve kennis van de stereometrie opgedaan in de eerste drie klassen, te ordenen.

Enige definities en stellingen over de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken. Het is gewenst deze toe te passen bij het tekenen van doorsneden van vlakken en prisma's en piramiden. In het bijzonder zal aandacht besteed moeten worden aan evenwijdigheid en loodrechte stand en in verband hiermee aan hoeken van lijnen en vlakken.

Afstand van punt en vlak, lijn en vlak, twee vlakken, twee lijnen.

Het berekenen van hoeken en ook van afstanden kan beperkt blijven tot eenvoudige gevallen in kubus, rechthoekig blok en regelmatige drie- of vierzijdige piramide met behulp van de stelling van Pythagoras, cosinus- en sinusregel. De theorie van oppervlakten en inhouden kan achterwege blijven; de leerlingen moeten echter in staat zijn de oppervlakten en inhouden van de genoemde lichamen te berekenen, evenals van cilinder, kegel en bol.

Enkele verzamelingen:

$\{X \mid d(X, A) = d(X, B)\}$

$\{X \mid d(X, l) = d(X, m),\ l \text{ snijdt } m\}$

$\{X \mid d(X, l) = d(X, m),\ l \,//\, m\}$

$\{X \mid d(X, \alpha) = d(X, \beta),\ \alpha \text{ snijdt } \beta\}$

$\{X \mid d(X, \alpha) = d(X, \beta),\ \alpha \,//\, \beta\}$

$\{X \mid d(X, A) = a\}$

$\{X \mid d(X, l) = a\}$

$\{X \mid d(X, \alpha) = a\}$

$\{x \mid x \text{ door } P \wedge x \text{ snijdt } l\}$
$\{x \mid x \text{ door } P \wedge x \,//\, a\}$
$\{x \mid x \text{ door } P \wedge x \perp l\}$
$\{x \mid x \text{ snijdt } l \wedge x \,//\, m\}$

B. *Coördinaten; vectoren*

Rechthoekig assenstelsel, aanduiding van punten (x, y, z), de afstand van twee punten, het midden van een lijnstuk.
Het vlak: $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$.
De bol : $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.
Vectoren in R_3.
Vaste vectoren met O als beginpunt; is $A(a_1, a_2, a_3)$ het eindpunt, dan is $OA = \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; kengetallen van een vector.
Een basis in R_3: de basisvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, aangeduid met $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$; voor elke vector $\underline{a}$ geldt: $\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_2\underline{e}_3$.
De lengte van een vector $\underline{a}$: $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
Het inwendig produkt van twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$:

$$(\underline{a} \,.\, \underline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Vectorvoorstelling van een punt en een lijn: als in R_2.
Vectorvoorstelling van een vlak:
door A en $//\, \overrightarrow{OB}$ en $//\, \overrightarrow{OC}$: $\underline{x} = a + \lambda\, \underline{b} + \mu\underline{c}$;
door A, B en C: $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\, (\underline{b} - \underline{a}) + \mu\, (\underline{c} - \underline{a})$.
De normaalvector $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ van het vlak $\{(x, y, z) \mid a_1x + a_2y + a_3z = a_4\}$.
De hoek φ van twee vlakken met normaalvectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$:

$$\cos \varphi = (\underline{a} \,.\, \underline{b}) : |\underline{a}| \,.\, |\underline{b}|.$$

De afstand van een punt en een vlak.

Statistiek

In de onderbouw is de leerlingen enig begrip bijgebracht van de methoden van de beschrijvende statistiek, terwijl eventueel enige eenvoudige kansexperimenten aan de orde zijn gesteld.

In de bovenbouw wordt de *beschrijvende statistiek* herhaald en uitgebreid. De spreiding (standaarddeviatie) verdient de aandacht, waarbij de berekening met behulp van de verkorte methode kan worden behandeld.

De correlatie tussen twee rijen waarnemingsgetallen kan gedemonstreerd worden met behulp van een correlatiediagram (puntenwolk). Het begrip „regressielijn" kan genoemd worden; geen ingewikkelde berekeningen. Wel kan worden besproken in hoeverre oorzaak en gevolg in bepaalde gevallen in verband staan met correlatie. Geen berekening van een correlatiecoëfficiënt.

Veel aandacht dient besteed te worden aan het trekken van *conclusies* uit het gegeven statistische waarnemingsmateriaal, aan interpolatie en extrapolatie.

Geschikte voorbeelden vindt men in het boekje *„Cijfers in lijnen"* (ondertitel „Het hanteren van statistieken en grafieken in het dagelijks leven") van Drs. B. van der Meer en G. S. E. Mandema, Stichting IVIO Amsterdam, 1966. Ook in *„Synopses for modern secondary school mathematics"*, OECD, 1961 vindt men aanwijzingen voor de behandeling van statistiek in de bovenbouw (non-scientific line).

Op het misbruik dat van statistieken gemaakt kan worden dient te worden gewezen. Zie bijvoorbeeld Huff, *„How to lie with statistics"*

Tenslotte kan ook het onderwerp *steekproeven* aan de orde worden gesteld. Om het onbetrouwbaarheidsrisico bij een steekproef te kunnen begrijpen, is het nodig, dat de kans op k successen bij n deelexperimenten berekend kan worden. (Dus bijv. de kans op 2 maal 6, als iemand 5 maal met een dobbelsteen werpt.)

Omdat een dergelijke kans gelijk is aan $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, waarin p de kans op succes en $q = 1 - p$ is, is het nodig dat permutaties, combinaties en de binomiaalformule behandeld worden.

Het onbetrouwbaarheidsrisico bij een steekproef kan behandeld worden aan de hand van vraagstukken als:

Iemand werpt 10 maal met een munt en zal de munt voor „vals" verklaren, als hij 0, 1, 9 of 10 keer kruis gooit.

Wat is de kans, dat hij op deze manier een zuivere munt voor „vals" verklaart?

Hierbij kan gewezen worden op de noodzakelijkheid bij steekproeven van te voren het onbetrouwbaarheidsrisico vast te stellen, omdat men anders uit een steekproef „kan halen wat men wil". Ook de eis van het a-select zijn dient aan de orde te komen. Na deze behandeling zal het nauwelijks nodig zijn er op te wijzen, dat het percentage successen in de steekproef niet het percentage successen in de populatie behoeft te zijn. Het is niet de bedoeling, dat ingewikkelde toetsingsvraagstukken gemaakt worden.

Naast de reeds genoemde literatuur kan nog worden gewezen op
Bunt, *Statistiek voor het VHMO* (Wolters)
Moroney, *Facts from Figures* (Pelican).

OVER DE FORMULES $t_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \geqq 2)$ EN $\lim s_k = s$.

door

R. KOOISTRA

Ede

1. We onderzochten zeven leerboeken op de belangrijke formule, geldig voor *elke* rij:

$$t_k = s_k - s_{k-1} \; (k \geqq 2)$$
$$t_1 = s_1.$$

a. Drie leerboeken geven de formule correct (daarvan vermeldt één: $k \neq 1$; o.i. duidelijker is $k \geqq 2$).

b. Eén leerboek vermeldt: $s_k - s_{k-1} = t_k$ en voegt er in „proza" aan toe, dat voor $k = 1$ de formule niet geldt, maar dat dan $t_1 = s_1$ geldt. In de voorbeelden wordt echter naar de voorwaarde $k \geqq 2$ niet omgekeken:

Het bewijs: $s_k = 2k^2 + k \Rightarrow t_k = 4k - 1 \Rightarrow t_k$ is een rekenkundige rij is dan ook *onvolledig*, omdat niet onderzocht wordt of $t_1 = s_1 = 3$ ook valt onder de formule $t_k = 4k - 1$ $(k \geqq 2)$.

c. Eén leerboek vermeldt zonder meer: $t_k = s_k - s_{k-1}$, alsof er geen vuiltje aan de lucht is.

d. Twee leerboeken vermelden de formule niet. Wel worden in één daarvan opgaven gegeven als:

1. Kan $s_k = k^2 + 2k + 3$ de somformule zijn van een r.r.?
2. Onderzoek of de rij met $s_k = 2k^2 - 3k$ rekenkundig is.
3. Bepaal p zo, dat de rij met $s_k = 3^k + p$ een m.r. is, waarbij de leerling dus zelf het verband tussen t_k en s_k dient op te sporen.

Gezien echter het belang van de formule, lijkt ons een expliciete vermelding in een leerboek zeer gewenst, zo niet noodzakelijk, maar dan ook volledig.

2. Wij hebben het eindexamen algebra 1962 van de gymnasia niet meegemaakt, maar opgave 3, waarin de rij met $s_k = k^2 - 3k + {}^{33}/_{16}$, dus met een s_k *met een constante term* voorkwam en waarin o.a. dè vraag gesteld werd:

c) *Voor welke waarden van k geldt* $t_k T_k = 4$ *als* $T_1 = 64$, $T_2 = -80$, $T_k = 4k - 15$ $(k \geqq 3)$? (antwoord: $k = 1$ en $k = 4$) moet toch menig leraar en menig leerboek-schrijver hebben opgeschrikt

en een soort „slachting" hebben aangericht onder de kandidaten. We kennen althans één leerboek, dat na 1962 in een nieuwe druk het voorbeeld $s_k = k^2 + 1$ heeft toegevoegd aan het reeds aanwezige voorbeeld $s_k = k^2$. Zonder meer was deze opgave al bijzonder lastig, maar met name voor de leerlingen, die door hun leerboek en(of) hun leraar op het punt van de genoemde formules maar kwalijk werden onderwezen.

Opmerking. Voor zover wij weten, was de vermelde opgave sinds 1936 de eerste, waarin een s_k met een constante term voorkwam. Op het h.b.s.-examen 1936 was de rij met $s_k = {}^2\log(2k^2 + 7k + 7)$ het onderwerp van de tweede (en tevens laatste!) opgave.

3. Vooral bij bewijzen, dat een rij met gegeven s_k meetkundig is — bij een meetkundige rij wordt de formule voor s_k, analoog aan $s_k = ak^2 + bk$ voor een rekenk. rij, immers niet behandeld, althans niet in de theorie — speelt de genoemde formule een grote rol. Het volgende bewijs van de opgave: [1])

Van een rij is $s_n = 2^n - 1$. Bewijs dat dit een m.r. is, is hoogst onvolledig:

Bewijs: $t_n = s_n - s_{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow t_{n+1} = 2^n \Rightarrow t_{n+1} = 2t_n$, de rij is dus een m.r. met reden $r = 2$; $t_1 = s_1 = 1$.

Juist is het volgende

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} t_n = s_n - s_{n-1} = 2^{n-1}\ (n \geqq 2) \\ t_{n+1} = 2^n\ (n \geqq 1) \end{array}\right\} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 2 (n \geqq 2)$ d.w.z.

de rij is alvast meetkundig vanaf $n = 2$.

Nu is: $t_2 = 2$, $t_1 = s_1 = 1$, dus $t_2/t_1 = 2$, d.w.z. de rij is inderdaad meetkundig (vanaf $n = 1$).

Opm.: 1. Neemt men t_{n-1} i.p.v. t_{n+1}, dan heeft men

$\left.\begin{array}{l} t_n = 2^{n-1}\ (n \geqq 2) \\ t_{n-1} = 2^{n-2}\ (n \geqq 3) \end{array}\right\} \dfrac{t_n}{t_{n-1}} = 2 (n \geqq 3)$ dus weer meetkundig vanaf $n = 2$ enz.

2. Men neme maar eens de rij met $s_n = 2^n + 1$, om te constateren hoezeer op de voorwaarde $n \geqq 2$ in de formule voor t_n gelet dient te worden.

3. Algemeen geldt: $s_k = pc^k + q$ *stelt de sommenrij voor van een meetkundige rij,* met reden c *als* $p = -q$ *is.*

Deze stelling is omkeerbaar; immers, voor een m.r. heeft men:

$s_k = a \dfrac{r^k - 1}{r - 1} = \dfrac{a}{(r-1)} r^k - \dfrac{a}{r-1}$ d.i. inderdaad van de gedaante $pr^k - p$.

---

[2]) C. J. Alders, *Algebra voor M.O. en V.H.O.*, dl. IIb, blz. 74.

4. Het eindexamen algebra van 1966 gaf in opgave 3 de interessante rij met $s_k = x^2 - 4x - x^{1-k}$; de rij blijkt meetkundig te zijn vanaf de *tweede* term:

$$t_k : t_{k-1} = 1/x \quad (k \geqq 3),$$

$$t_2/t_1 = \frac{x - 1}{x(x^2 - 4x - 1)} \neq 1/x (x \neq 0;\ x \neq 1;\ x^2 - 4x - 1 \neq 0).$$

Het aardige van deze opgave nu is, dat voor de vraag b: *Voor welke waarden van x is de gegeven rij sommeerbaar? Welke waarden kan de som aannemen?* kennis van de *aard* van de gegeven rij volslagen overbodig is; gebruikmaking daarvan is wat omslachtig, zelfs zeer ongewenst. Dit laatste overkomt niet de leerling, die doordrongen is van de definitie:

Een rij is sommeerbaar als $\lim_{k \to \infty} s_k$ *bestaat,*

en die dus niet direct zal komen aandraven met de voorwaarde $-1 < r < 1$ en de formule $s = \dfrac{a}{1 - r}$.

Iedere leraar weet bij ondervinding, dat dit laatstgenoemde euvel bij menig leerling hardnekkig optreedt, zelfs bij opgaven, waarin ,,in wijde omtrek'' geen r valt te bespeuren.

Opm.: 1. Het antwoord op de vraag: *Welke waarden kan de som s van de rij aannemen* luidt $s \geqq -4$. Het minimum -4 bereikt $s = x^2 - 4x$ voor $x = 2$, een waarde waarvoor de rij sommeerbaar. is De vraag had aan betekenis gewonnen, indien voor de coëfficiënt van x in s_k b.v. -1 was genomen. Het minimum van $s = x^2 - x$, n.l. $-1/4$ werd dan door $x = \frac{1}{2}$, dus *buiten* het toelaatbare gebied $x > 1$, aangewezen, zodat het niet omzien naar de voorwaarde $x > 1$ met een onjuist antwoord zou worden ,,beloond''.

2. De gegeven rij is meetkundig als ook $t_2/t_1 = 1/x$ is, d.i. als $x^2 - 4x = x$ is, dus als $x = 5$ is. Dit is in overeenstemming met de opmerking 3 in **3**, die, toegepast op $s_k = -x(1/x^k + x^2 - 4x$, immers naar behoren geeft: $x = x^2 - 4x$.

5. De genoemde definitie van sommeerbaarheid behoedt de leerling voor omslachtige oplossingen (zoals we in **4** zagen), weerhoudt hem van uitspraken als:

Een rij is sommeerbaar, als de rij meetkundig is en tevens $|r| < 1$ *is,*

neemt zijn vrees weg voor een vraag als deze:

Onderzoek of de rij $s_k = -\log(k + 1)$ *sommeerbaar is*

(eindexamen gymnasia 1959)

en geeft hem bovendien nog eens gelegenheid met een originele oplossing voor de dag te komen in:

Van een oneindige rij is $2s_k + 3t_k = 10$ $(k \geqq 1)$. *Bewijs, dat de rij meetkundig en sommeerbaar is.* (eindex. h.b.s. 1960)

Opl.: $\left.\begin{array}{l} 2s_k + 3t_k = 10 (k \geqq 1) \\ 2s_{k-1} + 3t_{k-1} = 10 (k \geqq 2) \end{array}\right\} 2t_k + 3t_k - 3t_{k-1} = 0 \Rightarrow \dfrac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{3}{5} (k \geqq 2)$

d.w.z. de rij is meetkundig (vanaf de eerste term); $r = \frac{3}{5}$, dus de rij is tevens sommeerbaar.

Het is nu volkomen juist s te bepalen uit

$$s = \frac{a}{1 - r} = \frac{2}{1 - \frac{3}{5}} = 5,$$

eleganter en korter is echter te schrijven:

$$2 \lim s_k + 3 \lim t_k = 10 \rightarrow 2s = 10 \rightarrow s = 5.$$

Men moet dan echter wel denken aan $\lim t_k = 0$ en daarom zou het de moeite lonen, aan de stelling:

De som van een sommeerbare meetkundige rij is $s = a/1 - r$ ook nog toe te voegen (hetgeen wel in het bewijs ervan wordt gebruikt): *voor deze rij geldt tevens* $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = 0$.

II

SYMBOLEN UIT DE VERZAMELINGSLEER [1])

13. Verzamelingen van elementen worden zo gegeven, dat ondubbelzinnig komt vast te staan, of een willekeurig element wel of niet tot de gedefinieerde verzameling behoort.

Voorbeelden.

De verzameling van de getallen 1, 2, 3, 4 wordt geschreven als

$$\{1, 2, 3, 4\},$$

die van de getallen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ als

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\},$$

waarbij echter de volgorde waarin de elementen tussen de accolades worden geplaatst geen rol speelt. {1, 2, 3, 4} en {4, 2, 1, 3} stellen dezelfde verzameling voor.

---

[1]) I „Logische symbolen" in het vorige nummer.

De eerstgenoemde verzameling kan ook worden genoteerd als

$$\{x \mid x \in \mathsf{N} \wedge x < 5\}.$$

Deze laatste regel is te lezen als: „de verzameling van de getallen x zodat (met de eigenschap dat) x een natuurlijk getal is en tevens x kleiner is dan 5.
Een verzameling kan dus worden gedefinieerd door een ondubbelzinnige eigenschap te geven waaraan alle elementen van die verzameling dienen te voldoen.
De verticale streep achter de variable x in ons laatste voorbeeld wordt gelezen als „zo, dat" of als „waarvoor geldt".

Opmerking. In de formule voor de laatste verzameling kwam het symbool N voor. Het is een symbool voor de verzameling van de natuurlijke getallen.
Analoog staan

$$\mathsf{Z},\ \mathsf{Q},\ \mathsf{R},\ \mathsf{C}$$

opvolgend voor de verzameling van de gehele getallen, voor die van de rationale getallen, voor die van de reële getallen en voor die van de complexe getallen.
Voor deze symbolen worden thans veel gebruikt.

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

14. $x \in V$ betekent: „x is element van de verzameling V".
$x \notin V$ betekent: „x is geen element van de verzameling V".
We lezen deze symbolen opvolgend als:

„x behoort tot V" en „x behoort niet tot V".

$\in$ noemen we een *lidmaatschapsymbool of adhesiesymbool.*
Met behulp van het adhesiesymbool kunnen we de redactie van § 10 op sommige plaatsen verscherpen. Bij de verklaring van de al-kwantor en van de existentiële kwantor konden we namelijk de notatie $x \in V$ gebruiken.
We geven nog een paar voorbeelden van de wijze waarop we verzamelingen kunnen definiëren.
De rand van een cirkel met een gegeven punt M tot middelpunt en met een gegeven straal r kunnen we aangeven door

$$\{X \mid XM = r\}$$

en de cirkelschijf met rand door $\{X \mid XM \leqq r\}$.
De verzameling van alle getallen x waarvoor geldt dat $x^2 < 2$ wordt geschreven als

$$\{x \mid x^2 < 2\}.$$

Het is gewenst hierbij aan te geven tot welke der in § 13 genoemde getallenverzamelingen x behoort, bijv.

$$\{x \mid x^2 < 2 \wedge x < 0 \wedge x \in \mathbb{Q}\}.$$

Algemeen stelt

$$\{x \mid A(x)\}$$

de verzameling voor van de elementen, die de door $A(x)$ aangegeven eigenschappen bezitten.
Ook kan men schrijven:

$$\{x \in V \mid A(x)\}$$

d.i. de verzameling van alle elementen van V met de door $A(x)$ aangegeven eigenschap.
We schrijven bijvoorbeeld:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 1000\}.$$

Men schrijft hiervoor ook wel:

$$\{x \mid x^2 < 1000 \wedge x \in \mathbb{N}\}.$$

15. De vereniging van de verzamelingen V en W wordt geschreven als

$$V \cup W.$$

Lees: „V met W”.

Definitie.
De vereniging van twee verzamelingen is de verzameling die uit alle elementen bestaat die tot minstens een van de verzamelingen behoren.

In formule:

$$V \cup W = \{x \mid x \in V \vee x \in W\}.$$

Voorbeeld.
Als $V = \{1, 2, 3, 4\}$ en $W = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, dan is
$V \cup W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

16. De *doorsnede* van de verzamelingen V en W wordt geschreven als

$$V \cap W.$$

Lees: „V door W”.

Definitie.
De doorsnede van twee verzamelingen is de verzameling, die uit alle elementen bestaat, die zowel tot de ene als tot de andere verzameling behoren.

In formule:

$$V \cap W = \{x | x \in V \wedge x \in W\}.$$

Voorbeeld.
Voor de verzamelingen V en W uit § 15 hebben we:

$$V \cap W = \{2, 4\}.$$

17. De *verschilverzameling* van de verzamelingen V en W wordt geschreven als

$$V \backslash W.$$

Ook als: $$V - W.$$

Lees: „V min W".
Definitie. De verschilverzameling van V en W is de verzameling van alle elementen van V die niet behoren tot W.
In formule:

$$V \backslash W = \{x | x \in V \wedge x \notin W\}.$$

Voorbeeld.
Voor de verzamelingen V en W uit § 15 hebben we:

$$V \backslash W = \{1, 3\}$$
$$W \backslash V = \{6, 8, 10\}.$$

Hieruit zien we reeds dat de verschilneming van twee verzamelingen een niet-commutatieve bewerking is

Opmerking. Men noemt $V \backslash W$ ook wel het complement van W in V.

18. Het *symmetrisch verschil* van de verzamelingen V en W wordt geschreven als

$$V \triangle W$$

Lees: „symmetrisch verschil van V en W".

Definitie.
Het symmetrisch verschil van twee verzamelingen is de verzameling die uit alle elementen bestaat die tot een en niet meer dan een van die beide verzamelingen behoren.

In formule:

$$V \triangle W = (V \cup W) \backslash (V \cap W)$$

Ook geldt:

$$V \triangle W = (V \backslash W) \cup (W \backslash V).$$

Het nemen van het symmetrisch verschil van twee verzamelingen blijkt wel een commutatieve bewerking te zijn.

Voorbeeld.
Voor de verzamelingen V en W uit § 15 hebben we

$$V \triangle W = \{1, 3, 6, 8, 10\}.$$

19. De eigenschap dat V een *deelverzameling* is van W wordt geschreven als

$$V \subset W.$$

Lees: „V vervat in W".
Analoog wordt

$$W \supset V$$

gelezen als: „W bevat V" of „W omvat V".
De *inclusie* $V \subset W$ wordt gedefinieerd door

$$\forall_a \{(a \in V) \Rightarrow (a \in W)\}.$$

$V \not\subset W$ wordt gedefinieerd door

$$\exists_a \{(a \in V) \Rightarrow (a \notin W)\}.$$

Voorbeeld.
Als V de verzameling van de zesvouden en W de verzameling van de drievouden is, dan geldt:

$$V \subset W.$$

Als $V \subset W$ en $W \supset V$, dan zijn de verzamelingen V en W *gelijk*; ze bevatten dezelfde elementen. Men schrijft dan:

$$V = W.$$

Voorbeeld.
Als V de verzameling is van de negenvouden en W de verzameling van de getallen, waarvan de som der cijfers een negenvoud is, dan hebben we:

$$V = W.$$

Steeds geldt

$$V \subset V,$$

d.w.z. elke verzameling is krachtens de gegeven definitie deelverzameling van zichzelf.
Indien $V \subset W$, terwijl er ook elementen van W zijn die niet tot V behoren, dan heet V een *echte deelverzameling* van W .
Men treft ook het symbool $\subseteq$ aan in dezelfde betekenis die hierboven aan het symbool $\subset$ werd toegekend. Bij gebruik van het symbool $\subseteq$ wordt het symbool $\subset$ gereserveerd om „echte" deelverzamelingen aan te geven.
Men verwarre de tekens $\in$ en $\subset$ niet met elkaar, d.i. dus het lid-

maatschapssymbool niet met het inclusieteken. Het laatste staat steeds tussen twee verzamelingen, het eerste tussen een verzameling aan de rechterkant en de elementen van die verzameling ter linkerzij.

20. Onder *lege verzameling* verstaan we de verzameling die geen enkel element bevat. Men geeft de lege verzameling aan door het symbool $\varnothing$, eveneens door { }, d.i. door twee accolades met niets ertussen in; ook nog wel door een cirkeltje $\bigcirc$.

Voorbeelden.
De verzameling van de gemeenschappelijke punten van een stel evenwijdige lijnen is de lege verzameling.
De vergelijking

$$2x + 1 = 10, x \in \mathbf{N}$$

heeft als oplossingsverzameling de lege verzameling.
De vergelijking

$$2x + 1 = 10, \ x \in \mathbf{R}$$

heeft tot oplossingsverzameling $\{4\frac{1}{2}\}$.
Deze voorbeelden geven relief aan het feit dat het van belang is aan te geven in welke getallenverzameling een vergelijking dient te worden opgelost.

Opmerking. In plaats van de term „lege verzameling" ontmoet men ook wel de term „nul-verzameling". We ontraden het gebruik van deze uitdrukking. Ze werkt de verwarring tussen de begrippen „lege verzameling" en „verzameling waarvan 0 het enige element is" in de hand.
De oplossingsverzameling van

$$x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}$$

is de „nul-verzameling", d.i. de lege verzameling.
De oplossingsverzameling van

$$x^3 + x = 0, x \in \mathbf{R}$$

is de verzameling met 0 als enig element, d.i. de verzameling $\{0\}$.

21. Dikwijls beschouwen we alleen verzamelingen die alle deelverzameling zijn van één vaste verzameling. Deze noemen we dan *al-verzameling* of *universum.*

Zo trad $\mathbf{R}$ in § 20 op als universum bij het oplossen van vergelijkingen.

Onder de *complementaire verzameling* V, van een gegeven verzameling V t.o.v. de al-verzameling U verstaan we de verschilverzameling $U \setminus V$.

$$V' = \{x | x \in V \wedge x \notin U\}.$$

In plaats van V' schrijft men ook V^* of CV of V^C.

22. Men zegt, dat de verzamelingen V en W hetzelfde *kardinaalgetal* hebben, als er een (1—1)-correspondentie bestaat tussen de elementen van V en die van W.
Men schrijft:

$$\# V = \# W.$$

Lees: „het kardinaalgetal van V = het kardinaalgetal van W". Voor eindige verzamelingen is het kardinaalgetal een natuurlijk getal; we noemen het het „aantal elementen" van de verzameling.

23. In ons wiskunde-onderwijs ontmoeten we frequent optredende getallenverzamelingen, die de naam van *interval* dragen.
Symbolen:

$$(a, b),\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b],$$
$$(a, \infty),\ [a, \infty),\ (-\infty, a),\ (-\infty, a].$$

(a, b) stelt de verzameling $\{x | a < x < b\}$ voor;
$[a, b]$ stelt de verzameling $\{x | a \leqq x \leqq b\}$ voor;
$[a, b)$ stelt de verzameling $\{x | a \leqq x < b\}$ voor;
$(a, b]$ stelt de verzameling $\{x | a < x \leqq b\}$ voor;
(a, ∞) stelt de verzameling $\{x | x > a\}$ voor;
$[a, \infty)$ stelt de verzameling $\{x | x \geqq a\}$ voor;
$(-\infty, a)$ stelt de verzameling $\{x | x < a\}$ voor;
$(-\infty, a]$ stelt de verzameling $\{x | x \leqq a\}$ voor.
Rechts van het symbool ∞ en links van het symbool $-\infty$ treffen we nimmer vierkante haken aan, in verband met de omstandigheid dat het symbool ∞ geen getal voorstelt.
Gewone haakjes wijzen op het eenzijdig of tweezijdig „open" zijn van de beschouwde intervallen, vierkante haken op het „gesloten" zijn.

24. *Overzicht van de besproken symbolen uit de verzamelingsleer.*
Verzamelingen: $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, $\{x | A(x)\}$, $\{x \in V | A(x)\}$.
Lidmaatschapsrelatie: $x \in V$, $x \notin V$.
Vereniging: $V \cup W$.
Doorsnede: $V \cap W$.
Verschilverzameling: $V \backslash W$.
Symmetrisch verschil: $V \triangle W$.
Inclusie: $V \subset W$, $V \subseteq W$.

Gelijkheid van verzamelingen: $V = W$.
Universum of al-verzameling: U.
Complementaire verzameling: V', V^*, CV, V^C.
Lege verzameling: $\{\ \}$, ϕ, O.
Kardinaalgetal van γ: $\# \gamma$.

Wansink.

BOEKBESPREKING

D. S. Mitrinović, *Calculus of Residues*, Tutorial Texts no. 4, Noordhoff, 1966, 87 pag., ing. *f* 6,90, geb. *f* 14,50.

Het boekje bevat geschikt oefenmateriaal om verschillende toepassingen van de residue-rekening te leren kennen, zoals bijv. berekening van integralen, sommatie van reeksen.

W. T. van Est

H. Behnke en H-G. Steiner, *Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen*; 335 blz.; ingen. 19,80 DM; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen; 1967.

Dit boek bevat de tekst van een aantal voordrachten in 1963 en 1964 gehouden voor Belgische en Luxemburgse wiskundeleraren aan het Mathematische Instituut en het Didactische Seminarium van de universiteit te Münster. De Duitse activiteiten „zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität" strekken zich blijkbaar niet tot Nederland uit. Dit is begrijpelijk als men overweegt, dat wij hier eveneens sinds 1963 de nascholingscursussen voor wiskunde-leraren kennen die uitgaan van de „Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde".

De uitvoerige tekst van de Münsterse voordrachten zijn echter ongetwijfeld ook voor de Nederlandse leraar van betekenis. De programma's van de gehouden conferenties zijn breed opgezet en we ontmoeten in de sprekerslijst tal van bekende namen, zoals H. Behnke, H-G. Steiner, H. Athen, G. Pickert, H. Tietz, A. Engel, H. Hermes. Al worden er met Duitse Gründlichkeit wel thema's besproken die voor de didactische problematiek van ons v.h.m.o. nog niet van directe waarde zijn (ik noem als voorbeeld de voordracht van Dzewas over *Filter im Analysisunterricht*), de behandelde stof is voor ons wiskundeleraren over het algemeen van direct belang.

Van de 18 teksten die in dit verslag opgenomen zijn wijs ik i.h.b. op de volgende:

G. Pickert, *Die Stellung der geometrischen Grundlagenforschung in der heutigen Mathematik*;

H-G. Steiner, *Zur Behandlung des Funktionsbegriffs*;
Algebra im Unterricht der Oberstufe der Gymnasien;

J-Lauter, *Logische und mengentheoretische Grundlegung der Gleichungslehre*;

A. Kirsch, *Elementare Gruppentheorie im Unterricht*;

H. Hermes, *Die Ausbildung der Mathematiker in mathematischer Logik und Grundlagenforschung*.

Een rijk boek dat onze belangstelling stellig waard is.

Joh. H. Wansink

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Verzamelingen*, 1e druk, 80 blz., *f* 3,90 (J. B. Wolters, Torusreeks deel 1).

Het verschijnen van de Torusreeks is mogelijk even belangrijk als de verschijning van het eerste deel van deze reeks. Onder deze naam laat de Nederlandse Onderwijs-Commissie van het Wiskundig Genootschap een serie boekjes verschijnen, waarin aan verschillende onderwerpen aandacht zal worden besteed. Dit wordt gemotiveerd door de toegenomen belangstelling voor de wiskunde, zegt Prof. Freudenthal in zijn voorwoord. Deze toename moge een feit zijn, maar wordt altijd „bewezen" met de grote animo voor Pythagoras. Het zou wel eens kunnen zijn, dat dit bewijs aanvechtbaar was . . .: abonnees zijn niet altijd lezers.

Terugkerend tot de Torusreeks vermeld ik, dat het niet de bedoeling is de boekjes populair te doen zijn in die zin, dat de inhoud de lezer tot verwondering brengt, zonder dat hij precies weet, waarover hij zich verwondert. Wél populair in die zin, dat ze zonder grote inspanning te lezen zijn door iemand, die een behoorlijk deel van de wiskunde-leerstof van de scholen voor VHMO heeft gehad. De boekjes zijn dan ook voor volwassenen en voor leerlingen van de hogere klassen bestemd.

Zonder hoovaardij reken ik mij tot de verzameling der volwassenen en tot die dergenen, die een behoorlijk stuk der bedoelde wiskunde hebben gehad. Het boekje zou dus o.a. voor mij bestemd kunnen zijn. Dat ik het echter zonder inspanning heb doorgelezen kan ik niet zeggen. De eerste twee hoofdstukken (verzamelingen en operaties bij verzamelingen) gingen best; met de gelijkmachtigheid kon ik het ook wel klaren; bij de cardinaalgetallen moest ik echt mijn best wel doen. Zou Prof. Freudenthal de Nederlandse scholier niet lichtelijk overschatten en zou Vredenduin, varend op een gymnasiaal kompas, daaraan niet mee doen?

Vredenduin heeft zijn stijl aan het begrip „populair" aangepast; hij veroorlooft zich enkele geslaagde guitigheden, die noden tot een graag gegeven glimlach. Ik waardeer dat, maar ben bang voor populaire vlaggen bij niet populaire lading. En die lading is nu eenmaal niet zo populair; de grapjes verhelen de pittigheid niet.

Natuurlijk heeft Vredenduin dit boekje helder geschreven; er is ook wel een goed evenwicht tussen stijl en inhoud; de lichtvoetige schrijfwijze camoufleert de zwaarvoetige mathesis niet en maakt het boek leesbaarder. Wat mij betreft mag de auteur nog wel meer deeltjes voor zijn rekening nemen.

De lezer zal begrepen hebben, dat ik aan de geschiktheid voor leerlingen twijfel; althans voor grotere groepen daarvan; de deelverzameling, die dit aan kan, is weliswaar niet leeg, maar maklijk aftelbaar. Wellicht zit er iets in ze te gebruiken als handleiding bij een cursus voor wiskundeleraren . . .; patent op deze gedachte zal ik echter niet aanvragen.

Groenman

STAATSEXAMEN GYMNASIUM 1966
Uit het verslag van de commissie

WISKUNDE

Door de A-kandidaten werd voor het onderdeel algebra (eventueel aangevuld met geschiedenis van de wiskunde of statistiek) gemiddeld 5,1 (v.j. 4,9) behaald.

A-kandidaten die geëxamineerd wensen te worden in de algebrastof voor de klassen 1 tot en met 4 (zonder logaritmen en rijen) dienen niet alleen van de vierkantsvergelijkingen en de kwadratische functies op de hoogte te zijn, maar ook de voorgaande hoofdstukken tot hun beschikking te hebben. Zo moeten zij op de hoogte zijn van: het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden, ook als één van die vergelijkingen b.v. luidt $x^2 + xy = 0$; het onderwerp strijdigheid en afhankelijkheid van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden; bewerkingen met wortels. Van belang is ook dat men begrijpt dat $\sqrt{x^2} = |x|$.

Indien een kandidaat differentiaalrekening of statistiek kiest, wordt van hem verwacht dat hij meer kan dan machinaal rekenen en b.v. begrijpt wat differentiëren is, resp. begrijpt op welke gronden men uit een steekproef conclusies over populatie kan trekken.

Voor het onderdeel meetkunde was bij de A-kandidaten het gemiddelde cijfer 5,3 (v.j. 4,8).

Het doet de subcommissie genoegen dat ditmaal de goniometrie door de A-kandidaten over het algemeen goed bestudeerd was.

Bij de B-kandidaten was het gemiddelde cijfer voor algebra 5,7 (v.j. 5,3); voor de stereometrie 5,9 (v.j. 5,0) en voor de goniometrie en analytische meetkunde 5,4 (v.j. 4,8).

Bij het schriftelijk gedeelte van het examen voor de B-kandidaten bleek weer dat zij die principieel elke logaritme herleiden tot een logaritme voor het grondtal 10, zichzelf in overbodige moeilijkheden brengen. Het overgaan op het grondtal 10 heeft in het algemeen alleen zin als men de tafel wil gaan gebruiken.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

183. Welke convexe vierhoeken $ABCD$ bevatten in hun binnengebied een punt P met de eigenschap, dat de driehoeken PAB, PBC, PCD en PDA gelijke oppervlakten hebben? (A. van Tooren).

184. Men kan narekenen, dat $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Hier staan drie opvolgende natuurlijke getallen, waarvan de som van de derdemachten weer een derdemacht is (dat ook 6 op 5 volgt, wordt als toevallig beschouwd). Welke zijn nu de kleinste drie opvolgende natuurlijke getallen, waarvan de som van de kwadraten weer een kwadraat is? (B. Kootstra).

OPLOSSINGEN

181. Gevraagd wordt een convexe veelhoek zo in driehoeken te verdelen, dat in elk hoekpunt evenveel zijden samenkomen. (Geen hoekpunt van een driehoek mag een zijde van een andere driehoek in twee delen verdelen.)

Onderstel we gaan uit van een convexe n-hoek met daarbinnen k hoekpunten. In elk hoekpunt komen i driehoeken samen.

Om te beginnen is $i \geqq 6$ onmogelijk, omdat dan de hoeken van de driehoeken gemiddeld kleiner dan 60° zouden zijn. Laten we verder het triviale geval $i = 2$, $n = 3$, $k = 0$ buiten beschouwing, dan moeten we alleen nog nagaan de gevallen $i = 3$, $i = 4$ en $i = 5$.

Het geval $i = 3$.

We gaan op twee manieren het aantal driehoeken in n en k uitdrukken. De som van de hoeken van de n-hoek is $(n - 2)$ 180°. De som van de hoeken bij de k hoekpunten is k . 360°. Dit is samen $(n - 2 + 2k)$ 180°. Het aantal driehoeken is dus $n - 2 + 2k$.

Elk van de k punten is hoekpunt van 3 driehoeken; elk van de n punten van 2 driehoeken. Omdat elke driehoek 3 hoekpunten heeft, is het aantal driehoeken dus $\frac{1}{3}(3k + 2n)$.

Dus moet

$$3n - 6 + 6k = 3k + 2n.$$

Dit levert:

a. $n = 6$, $k = 0$. Dit geval is niet realiseerbaar.
b. $n = 3$, $k = 1$. Dit geval kennen we reeds uit de opgave.

Het geval $i = 4$.

Op dezelfde manier vinden we

$$3n - 6 + 6k = 4k + 3n.$$

Dit levert: n willekeurig, $k = 3$.

a. $n = 3$. De realisering van dit geval vindt men in fig. 1.

b. $n \geqq 4$. Deze gevallen zijn niet realiseerbaar. Voor $n = 4$ ziet men dit als volgt (zie fig. 2). Uit de punten A, B, C, D vertrekken 8 lijnstukken; in de punten P, Q, R komen er 6 aan. We zijn dus verplicht de diagonalen van $ABCD$ erbij te trekken. Men ziet dan gemakkelijk in, dat zo geen oplossing mogelijk is. Voor grotere waarden van n is de redenering analoog.

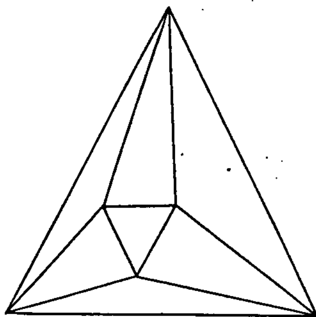


Fig. 1.

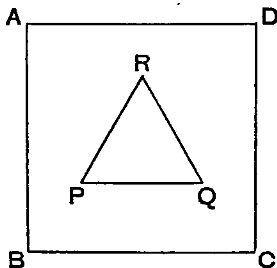


Fig. 2.

Het geval $i = 5$.

We vinden nu

$$3n - 6 + 6k = 5k + 4n.$$

Dit levert: $k = n + 6$.

a. $n = 3$. De realisering van dit geval vindt men in fig. 3.

b. $n \geqq 4$. Deze gevallen zijn niet realiseerbaar. We bewijzen dit voor het geval $n = 6$. Voor andere waarden van n vertoont het bewijs veel overeenstemming hiermee. In fig. 2 zien we, dat de $k = 12$ hoekpunten zullen moeten liggen op de lijnstukken, die uit de 6 hoekpunten vertrekken. We moeten nu in de 12-hoek, waarvan deze punten de hoekpunten zijn, diagonalen trekken. Vanuit 6 van de hoekpunten moeten elk 2 diagonalen vertrekken, vanuit de andere 6 elk 1. Dit is niet mogelijk.

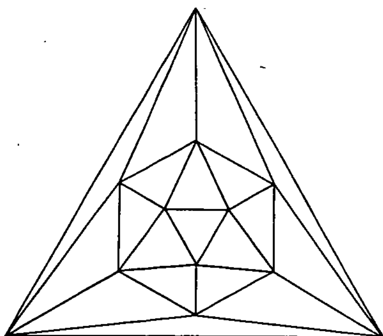


Fig. 3.

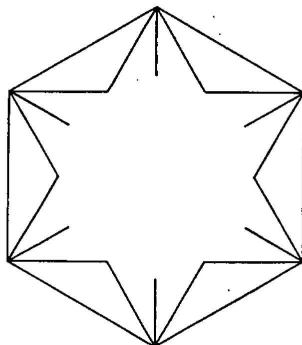


Fig. 4.

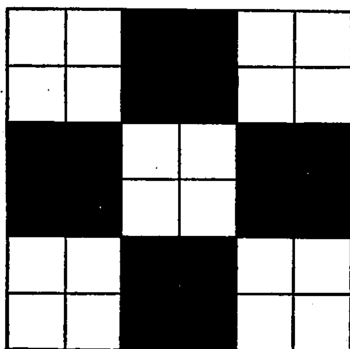
182. Gegeven zijn 9 rechthoekige fiches met breedte 1 cm en lengte 4 cm. Pas deze zo aan elkaar, dat er een vierkant van 36 cm² ontstaat.

Pas 36 van deze fiches zo aan elkaar, dat er een vierkant van 144 cm² ontstaat. En ook 81 zo, dat er een vierkant van 324 cm² ontstaat.

De hokjes van 1 cm² van het vierkant kleuren we wit en zwart volgens bijgaande figuur. Elk fiche zal, hoe het ook gelegd wordt, 2 witte en 2 zwarte hokjes bedekken. Er zijn niet evenveel witte als zwarte hokjes. En dus is het onmogelijk. Dit kan men ook gemakkelijk inzien door het eenvoudig te proberen.

In het derde geval kost het proberen te veel tijd. Met de methode van het wit en zwart kleuren ziet men direct de onmogelijkheid weer in.

Het middelste geval, met de 36 fiches, is natuurlijk flauw, Men legt de fiches in 12 rijen van 3.



WISKUNDEWERKGROEP VAN DE W.V.O.

NAJAARSCONFERENTIE.

De Wiskunde Werkgroep organiseert op zaterdag 18 en zondag 19 november een weekendconferentie met als thema:

Moderne Wiskunde voor v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o.

in het Henri Dunanthuis van de stichting ,,Woudschoten", Woudenbergseweg 54, Zeist.
Het programma luidt:

18 november

3 uur.	Aankomst
3.15 uur.	Opening door de voorzitter, Prof. dr. H. Freudenthal.
3.30—4.30 uur.	J. van Dormolen: *Het gebruik van verzamelingen in de wiskunde.*
4.45—5.45 uur.	Dr. P. M. van Hiele: *Het gebruik van vectoren, ook bij het m.a.v.o.*
6 uur.	Warme maaltijd.
7.30—8.30 uur.	R. Troelstra: *Functies, afbeeldingen en transformaties.*
Daarna:	discussies in drie groepen, te weten een v.w.o.-, een h.a.v.o.- en een m.a.v.o.-groep.

19 november

10.30—12 uur.	Voortzetting discussies in de groepen.
1 uur.	Broodmaaltijd.
2.30 uur.	Samenvatting van de resultaten van de discussies door een deskundige. Daarna algemene discussie.
4.30 uur.	Sluiting.

Kosten. Volledige conferentie met inbegrip van logies, zoveel mogelijk in
éénpersoonskamers: *f* 25.—, niet-leden *f* 30.—.
Zonder logies: *f* 20.—, niet-leden *f* 25.—.
Eén dag: *f* 10.—, niet-leden *f* 12.50.

Indien men niet zelf lakens, sloop en handdoek meebrengt, betaalt men *f* 2,75 huur.
Opgave vóór 1 november aan de secretaris, drs. H. C. Vernout, Van Nouhuysstr. 11, Haarlem, tel. 023-57288. Storting van het bedrag op giro 261036 t.n.v. penn. W.V.O.-Wiskunde Werkgroep te Voorburg.
Reiskosten worden vergoed; zo mogelijk ook een klein deel van de conferentiekosten.
Maximum aantal deelnemers: 50.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie *"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"* in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam Oost op woensdag 25 oktober 1967:

Prof. Dr. H. de Vries: Notaties in de wiskunde. Aanvang 20 uur.

LIWENAGELJ

De leden die Euclides via Liwenagel ontvangen wordt verzocht om het abonnementsgeld (f 5,50) over te maken naar postrekening 87185 t.n.v. Penningmeester van groep Liwenagel te Heemstede.